Seminário Brasileiro de Análise - SBA
Instituto de Matemática e Estatatística - USP
Edição N$^{\underline{0}}$ 68 Novembro 2008

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E TEORIA DOS CAMPOS *†

M. FORGER ‡

Resumo

A meta principal deste minicurso é dar uma pequena contribuição ao fortalecimento da interação entre as áreas de análise e de física matemática.

1 Introducão

Inicialmente, vale lembrar que as origens históricas das duas áreas de análise e de física matemática são indissociáveis, remontando à época em que Newton e Leibniz inventaram o cálculo, com o objetivo (inicial) de entender as leis da mecânica celeste.

Mais especificamente, o mais forte ponto de contato tem sido entre as áreas de equações diferenciais ordinárias e da mecânica, de um lado, e de equações diferenciais parciais e da teoria dos campos, de outro lado. Não me parece exagero afirmar que uma sem a outra simplesmente não existiria.

2 Equações Diferenciais Ordinárias e Mecânica

Na mecânica newtoniana, o movimento de uma partícula pontual (de massa m) é determinado pela equação de Newton, que expressa a sua aceleração $\ddot{\boldsymbol{x}}$ em termos da força $\boldsymbol{F}$ que o ambiente exerce nela e que pode depender da sua posição $\boldsymbol{x}$ e também da sua velocidade $\dot{\boldsymbol{x}}$ (para simplificar os argumentos, suprimimos uma possível dependência explícita da força em relação ao tempo):

$$m\,\ddot{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\;. \tag{2.1}$$

Obviamente, a equação (2.1) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que determina a trajetória $\boldsymbol{x} : t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ da partícula a partir de sua posição $\boldsymbol{x}_0$ e sua velocidade $\dot{\boldsymbol{x}}_0$ em algum instante inicial t_0.

*Partially supported by **CNPq**
†*Mathematics Subject Classifications:* 35-01, 35Qxx
Key words: Partial differential equations, mathematical physics.
‡Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, forger@ime.usp.br

As mesmas afirmações valem para um sistema de N partículas: basta mudar a interpretação física do espaço vetorial em que “vivem” os vetores $\boldsymbol{x}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\ddot{\boldsymbol{x}}$ e $\boldsymbol{F}$, substituindo o espaço físico $\mathbb{R}^3$ pelo espaço de configurações $\mathbb{R}^{3N}$. Neste caso, m se torna uma matriz diagonal que reune as massas das diversas partículas do sistema, e a equação expressa a aceleração de cada uma delas em termos da força nela exercida por cada uma das outras e pelo ambiente.

Assim, a mecânica newtoniana impulsionou o estudo de equações diferenciais ordinárias, logo após a publicação das “Principia” em 1687.

Obviamente, a equação (2.1) só permite fazer previsões concretas quando conhecemos a força $\boldsymbol{F}$. Felizmente, toda força observada na natureza pode sempre ser decomposta na soma de várias contribuições, cada uma das quais é regida por alguma simples “lei de força”.

Uma das mais importantes restrições refere-se à questão como a força $\boldsymbol{F}$ depende da velocidade $\dot{\boldsymbol{x}}$. Ocorre que na sua maioria, as forças encontradas na natureza dependem apenas da posição da partícula e não da sua velocidade: exemplos são a força gravitacional e a força elétrica. Neste caso, a equação (2.1) assume a forma

$$m\,\ddot{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\;. \tag{2.2}$$

Isso permite interpretar $\boldsymbol{F}$ como um *campo de força* no espaço físico: este campo, ou seja, a função $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, descreve qual *seria* a força exercida sobre a partícula *se* ela *estivesse* no ponto $\boldsymbol{x}$. Mais do que isso: constata-se que esta função pode sempre ser fatorizada: é o produto de um escalar (uma quantidade numérica) que é atributo exclusivo da partícula e um campo vetorial que é atributo exclusivo do ambiente. Por exemplo, a força gravitacional é o produto da própria massa da partícula e do que chamamos o campo gravitacional, produzido pelo ambiente,[1] e de modo semelhante, a força elétrica é o produto da carga elétrica da partícula e do que chamamos o campo elétrico, produzido pelo ambiente. Sendo assim, a lógica do procedimento pode ser invertida no sentido de que podemos medir o valor dos diversos campos em qualquer ponto do espaço se colocarmos uma “partícula teste” neste ponto e observarmos a aceleração que ela sofre. De fato, é exatamente essa a prescrição experimental para medir campos!

Quanto a forças com dependência não-trivial da velocidade, encontram-se na natureza apenas duas: a força de fricção onde $\boldsymbol{F}$ é proporcional a $-\dot{\boldsymbol{x}}$ e a

[1] Se chamarmos a massa que aparece na equação de Newton (2.1) ou (2.2) de “massa inerte” e a massa que aparece como medidor da intensidade com a qual a partícula reage à influência do campo gravitacional de “massa gravitacional”, a afirmação básica do “princípio de equivalência”, que é um dos pilares da relatividade geral e foi confirmado experimentalmente com alto grau de precisão, é que o quociente entre estes dois tipos de massa é uma constante universal, igual para todo tipo de matéria que existe no universo: seu valor é fixado pela escolha do sistema de unidades.

força magnética onde $\boldsymbol{F}$ depende linearmente de $\dot{\boldsymbol{x}}$ e é ortogonal a $\dot{\boldsymbol{x}}$, de modo que podemos escrever a primeira na forma

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \;=\; -\, f_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\,\dot{\boldsymbol{x}}\ ,$$

e a segunda na forma

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \;=\; \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\ .$$

No primeiro caso, trata-se de uma força que só existe no mundo macroscópico mas que não é fundamental,[2] uma força "efetiva" que é o resultado final de uma interação complicadíssima entre um enorme número de partículas microscópicas, e portanto não devemos nos surpreender que uma lei para a força de fricção não passa de uma aproximação: por exemplo, a hipótese de que o fator de proporcionalidade f_{f} seja constante (i.e., independente de $\dot{\boldsymbol{x}}$) só é válida quando as velocidades atingidas são "suficientemente pequenas". Pior do que isso: este fator de proporcionalidade não fatoriza, ou seja, não há como escrevê-lo como produto de uma quantidade que seria atributo exclusivo da partícula e uma quantidade que seria atributo exclusivo do ambiente, ou seja: não faz sentido introduzir uma "aspereza de partículas" ou um "campo de fricção". No segundo caso, a situação é radicalmente diferente, pois trata-se de uma das forças fundamentais da natureza com uma lei de força exata, válida em toda e qualquer situação, no mundo macroscópico assim como no microscópico, e ainda tal que o fator de proporcionalidade $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$ pode ser fatorizado: é o produto da carga elétrica da partícula e do que chamamos o campo magnético. Assim, combinando as leis da força elétrica e da força magnética em uma única, podemos formular a lei da *força eletromagnética* ou *força de Lorentz* exercida sobre uma partícula com carga elétrica q

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{em}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \;=\; q\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \,+\, \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\big)\ . \tag{2.3}$$

Também vemos que, mais uma vez, a lógica do procedimento pode ser invertida no sentido de que podemos usar esta fórmula como prescrição para medir o valor tanto do campo elétrico como do campo magnético em qualquer ponto do espaço se colocarmos uma "carga teste" neste ponto e observarmos a aceleração que ela sofre (agora comparando os resultados para velocidade $= 0$ e para velocidade $\neq 0$). E é exatamente essa a prescrição experimental para medir o campo eletromagnético.

Resumindo, vemos como uma formulação correta de leis de força faz com o que a noção de campo já aparece na mecânica newtoniana! Além disso, o número reduzido de leis de força básicas, a partir das quais se deduzem as mais complicadas de modo essencialmente combinatórico, leva naturalmente ao

[2] A força fundamental subjacente é a interação eletromagnética entre átomos e/ou moléculas.

estabelcimento de um pequeno “zoológico” de equações diferenciais ordinárias de particular importância, entre os quais podemos citar: o oscilador harmônico e o oscilador anharmônico, o problema de Kepler e o problema do potencial central em geral, e o problema de N corpos.

3 Equações Diferenciais Parciais e Teoria dos Campos

Do mesmo modo que equações diferenciais ordinárias na mecânica, equações diferenciais parciais aparecem naturalmente na teoria dos campos. Também existem algumas equações diferenciais parciais que têm aplicações em outras áreas do conhecimento não relacionadas com física matemática, inclusive em problemas puramente matemáticos, mas ainda são poucas. (Como exemplo, podemos citar duas versões não-lineares da equação de difusão, a saber a equação do fluxo de Ricci que se mostrou fundamental na demonstração da conjectura de Poincaré e a equação de Black & Scholes para a precificação de opções.) Assim, como tentarei arguir no decorrer deste minicurso, temos hoje um “zoológico” de equações diferenciais parciais de particular importância que podem (e, na minha modesta opinião, até um certo grau devem) influenciar na escolha de problemas a serem abordados pelos matemáticos que trabalham nesta área de análise.

O termo “teoria dos campos” delinea uma enorme área da física na qual se enquadra qualquer modelo em que as variáveis dinâmicas básicas são campos, ou seja, onde as quantidades físicas de interesse dependem não apenas do tempo, como na mecânica, mas também da posição no espaço. Como no caso da mecânica, a teoria dos campos possui uma versão clássica e uma versão quântica, mas ao contrário do que acontece na mecânica, a estrutura matemática subjacente é bem estabelecida somente na teoria clássica, não na teoria quântica. Exemplos de áreas de alta relevância da física que se enquadram na teoria clássica dos campos são

- a dinâmica dos fluidos, regida pelas equações de Euler para o fluido ideal e, mais geralmente, pelas equações de Navier-Stokes para o fluido viscoso;
- o eletromagnetismo, regido pelas equações de Maxwell;
- a relatividade geral como teoria da gravitação, regida pelas equações de Einstein.

Por outro lado, a teoria quântica dos campos - apesar de, até hoje, não ter atingida um estado de desenvolvimento matematicamente satisfatório - é a base do nosso entendimento da estrutura da matéria em seu nível mais elementar. Atualmente, a física das partículas e das interações entre elas (mais exatamente, a descrição quantitativa de três das quatro interações - a eletromagnética, a fraca e a forte) é codificada no “modelo padrâo”, que por sua vez é inteiramente baseada na teoria quântica dos campos – mais precisamente, em uma teoria de calibre ou teoria de Yang-Mills na sua versão quântica.

Matematicamente, no âmbito clássico, campos são simplesmente (coleções de) funções sobre o que chamamos de “espaço-tempo” – um conceito introduzido por Hermann Minkowski há exatamente 100 anos.[3] Mas vale enfatizar que este conceito, além de se mostrar essencial para a compreensão da relatividade (tanto a restrita como a geral), também é útil (ainda que não indispensável) no contexto não-relativístico, pois de modo geral, campos exibem dependência não-trivial tanto temporal como espacial, e estas dependências são atreladas através das equações diferenciais parciais que regem a sua evolução.

A idéia de que o conceito de campo é algo fundamental – hoje diríamos: um novo paradigma da física – começou a ganhar força durante o 19º século, com Michael Faraday como seu primeiro grande protagonista, apesar de inicialmente ter encontrada muita resistência. Nesta época, a questão básica foi se campos teriam algum grau de realidade física ou se não seriam apenas entidades matematicamente convenientes. Hoje, podemos afirmar em retrospectiva que este debate acalorado só foi decidido e encerrado, no sentido de que campos possuem sim uma realidade física, tão boa quanto as partículas da mecânica newtoniana, quando a noção do “éter” como substrato material para a propagação do campo eletromagnético (em particular, de ondas eletromagnéticas) tornou-se insustentável.

Mais ou menos paralelamente, a partir de meados do 18º século, surgiu o estudo de equações diferenciais parciais como uma nova área da análise. As primeiras tais equações, que apareceram no âmbito da dinâmica dos fluidos, foram as equações de Euler (1757)

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \boldsymbol{v} \right) + \boldsymbol{\nabla} p ~=~ \boldsymbol{f} ~, \tag{3.4}$$

e as equações de Navier (1822) e Stokes (1842-1845)

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \boldsymbol{v} \right) + \boldsymbol{\nabla} p \, - \, \eta \, \Delta \boldsymbol{v} \, - \left(\tfrac{1}{3} \eta + \zeta \right) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) ~=~ \boldsymbol{f} ~, \tag{3.5}$$

onde $\boldsymbol{v}$ é o campo de velocidades do fluido, ρ sua densidade, p sua pressão e $\boldsymbol{f}$ a densidade de forças externas agindo sobre ele, enquanto que as constantes η e ζ denotam, respectivamente, a sua viscosidade e a sua viscosidade de volume.

[3] Em 21.09.1908, Minkowski proferiu uma palestra entitulada “Raum und Zeit” (Espaço e Tempo) em que resumiu essa unificação na sua famosa frase: “Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.” (De agora em diante, o espaço por si e o tempo por si deverão se reduzir a meras sombras e apenas um tipo de união entre eles deverá preservar sua autonomia.) Para uma reprodução completa desta palestra, veja http://de.wikisource.org/wiki/Raum_und_Zeit_(Minkowski).

Elas ainda precisam ser complementadas pela equação da conservação da massa e por uma equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \, \Delta u \;=\; f \;, \tag{3.6}$$

onde u é a densidade de qualquer uma entre várias quantidades sujeitas a processos de transporte no fluido por condução (não convecção), f é a densidade de produção desta quantidade e $\lambda > 0$ a constante de difusão pertinente: um exemplo típico é a equação do calor onde u representa a densidade de energia térmica (e $f = 0$ para sistemas termicamente isolados); outro exemplo é a equação de transporte por difusão de substâncias químicas onde u representa a concentração de alguma substância num solvente (e $f = 0$ na ausência de reações químicas).[4] Cabe mencionar que o progresso na investigação das propriedades matemáticas dessas equações tem sido (e continua sendo) muito lento, devido à enorme dificuldade causada pela sua não-linearidade e à grande complexidade dos fenômenos que descrevem, inclusive o da turbulência – tanto que uma melhor compreensão destas questões ainda constitui um dos grandes desafios da matemática moderna (é um dos "millenium problems" do Clay Mathematics Institute). Por outro lado, devemos registrar, como um dos maiores triunfos da ciência do 19º século, a formulação das equações de Maxwell (1865) que determinam o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e o campo magnético $\boldsymbol{B}$ a partir da densidade de carga elétrica ρ e da densidade de corrente elétrica $\boldsymbol{j}$, conforme

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0} \;, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \;=\; -\,\kappa \, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \;, \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \;=\; \kappa \mu_0 \left(\boldsymbol{j} \,+\, \epsilon_0 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \;. \tag{3.10}$$

onde ϵ_0, μ_0 e κ são constantes tais que a combinação $c = 1/\kappa\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ tem a dimensão de uma velocidade: quantitativamente, como foi descoberto por Weber & Kohlrausch (1856), ela é igual à velocidade da luz (no vácuo). Essa "lex generalis" do eletromagnetismo acabou levando a noção de campo ao nível de um novo paradigma da física e ao mesmo tempo impulsionou o estudo sistemático de outras duas equações clássicas da física matemática – a equação de Laplace/Poisson

$$\Delta u \;=\; f \;, \tag{3.11}$$

[4]Prefiro me referir à equação do calor como a equação de difusão, pois ela serve para descrever, em aproximação linear (a aproximação de ordem mais baixa não-trivial), processos de difusão de muitas quantidades, entre as quais a energia térmica é apenas uma.

e a equação de ondas

$$\Box u \;\equiv\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,-\, \Delta u \;=\; f \;, \tag{3.12}$$

onde $c > 0$ é uma constante que representa a velocidade de propagação das ondas sob consideração. Hoje, as equações (3.11), (3.6) e (3.12) são consideradas as três equações diferenciais parciais lineares básicas da física clássica: são todas da forma $Du = f$ onde D é um operador diferencial parcial linear de segunda ordem a coeficientes constantes e a "solução" u assim como a "fonte" f são funções ou, mais geralmente, distribuições definidas sobre algum aberto Ω de $\mathbb{R}^n$.

No 20º século, o "zoológico" de equações diferenciais parciais de importância central em física expandiu, e consideravelmente, em função do advento de duas novas teorias fundamentais: a relatividade e a teoria quântica.

Por um lado, a relatividade restrita implicou na necessidade de reformular todas as leis conhecidas da física de modo a se tornarem invariantes sob transformações de Lorentz, em vez de transformações de Galilei, enquanto que a relatividade geral, que deu início à geometrização das interações fundamentais da física, foi muito além disso quando estabeleceu o axioma de corariância geral, segundo o qual todas as leis da física devem ser invariantes sob transformações gerais de coordenadas – lineares ou não. Assim, configurou-se um forte motivo para reformular as três equações diferenciais parciais lineares básicas da física clássica de forma geométrica, em variedades, invariante sob qualquer transformação de coordenadas locais. Em particular, este programa pode ser aplicado às três equações diferenciais parciais lineares básicas da física clássica: basta substituir Ω por uma variedade M e o operador diferencial envolvido

- pelo operador de Laplace em uma variedade riemanniana M com métrica g qualquer, que em coordenadas locais x^i pode ser definido por

$$\Delta \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g)}\;g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \;,$$

- pelo operador de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} \,-\, \lambda\,\Delta u \;=\; f \;,$$

  no produto cartesiano $I \times M$ de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com uma variedade riemanniana M qualquer,

- pelo operador de ondas em uma variedade lorentziana M com métrica g qualquer, que em coordenadas locais x^μ (com $x^0 = ct$) pode ser definido por

$$\Box \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{|\det(g)|}\;g^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \;.$$

Neste contexto, já não há mais como falar em operadores a coeficientes constantes, pois tal conceito depende do sistema de coordenadas locais escolhido.

De modo semelhante, o advento da teoria da relatividade também levou a uma reformulação das próprias equações de Maxwell que a originaram. Primeiro, note que as equações não homogêneas (3.10) e (3.7) levam imediatamente à lei de conservação da carga elétrica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \;=\; 0 \; . \tag{3.13}$$

Segundo, observe que as equações homogêneas (3.9) e (3.8) podem ser resolvidas pela introdução de um potencial vetorial $\boldsymbol{A}$ e um potencial escalar ϕ tais que

$$\boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \; , \tag{3.14}$$

e

$$\boldsymbol{E} \;=\; -\,\boldsymbol{\nabla}\phi \,-\, \kappa \, \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \; , \tag{3.15}$$

sendo que estes potenciais não são unicamente determinados, mas podem ser submetidos a uma transformação de calibre, i.e., uma transformação da forma

$$\boldsymbol{A} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{A}' \;=\; \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \quad , \quad \phi \;\longrightarrow\; \phi' \;=\; \phi \,-\, \kappa \, \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{3.16}$$

com uma função arbitrária χ, sem afetar os campos $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{E}$. No âmbito da relatividade restrita, este sistema de equações pode ser substancialmente simplificado se unificarmos o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e o campo magnético $\boldsymbol{B}$ em um tensor de campo F que é uma 2-forma sobre o espaço de Minkowski, o potencial escalar ϕ e o potencial vetorial $\boldsymbol{A}$ em um potencial A que é uma 1-forma sobre o espaço de Minkowski, e a densidade de carga ρ e a densidade de corrente $\boldsymbol{j}$ em uma corrente que é uma 3-forma sobre o espaço de Minkowski. Então com uma apropriada escolha das constantes (por exemplo, $\kappa = 1/c$), a lei de conservação da carga elétrica (3.13) afirma que a 3-forma j é fechada,

$$dj = 0 \; , \tag{3.17}$$

as equações homogêneas (3.9) e (3.8) afirmam que a 2-forma F é fechada,

$$dF = 0 \; , \tag{3.18}$$

as equações não homogêneas (3.7) e (3.10) afirmam que a 3-forma j é a derivada exterior da 2-forma $*F$ obtida da 2-forma F pela aplicação do operador $*$ de Hodge (no espaço de Minkowski),

$$d * F = j \; , \tag{3.19}$$

as fórmulas (3.14) e (3.15) que expressam os campos em termos de potenciais afirmam que a 2-forma F é a derivada exterior da 1-forma A,

$$F = dA \; , \tag{3.20}$$

e as transformações de calibre dadas pela fórmula (3.16) expressam a liberdade de redefinir A pela adição da derivada exterior de uma função χ, sem afetar F,

$$A \longrightarrow A' = A + d\chi \,. \tag{3.21}$$

Finalmente, a passagem ao âmbito da relatividade geral é efetuada pela prescrição do acoplamento mínimo: substituir o tensor métrico do espaço de Minkowski pelo tensor métrico de uma variedade lorentziana geral (o que afeta a definição do operador $*$, uma vez que esta depende do tensor métrico utilizado) e substituir todas as derivadas parciais por derivadas covariantes. Assim chegamos à teoria na qual o campo eletromagnético é acoplado ao campo gravitacional.

Quanto ao próprio campo gravitacional, sua dinâmica é governada pelas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\, T_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} \,, \tag{3.22}$$

onde, em coordenadas locais x^μ quaisquer, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é a curvatura escalar, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria, γ é a constante gravitacional de Newton e Λ é a constante cosmológica.

Além dessas equações relacionadas com a física clássica, temos ainda uma série de equações diferenciais parciais lineares provindo da mecânica quântica, entre elas as equações de Schrödinger e de Pauli na mecânica quântica não relativística e as equações de Klein-Gordon e de Dirac na mecânica quântica relativística (a primeira já aparece na física clássica, onde é conhecida como a equação de Helmholtz). De modo semelhante, a teoria quântica dos campos providencia uma gama de equações diferenciais parciais não lineares, entre elas as equações de Yang-Mills (uma generalização natural das equações de Maxwell que faz uso da estrutura de álgebras de Lie semisimples) e equações obtidos por acoplamentos naturais entre várias das equações tradicionais, como aparecem na QED (eletrodinâmica quântica), na QCD (cromodinâmica quântica) e, mais geralmente, no modelo padrão da física das partículas.

Finalmente, seguindo o espírito da "geometrização" da física (pelo menos da física clássica) deslanchada pela relatividade geral e, subsequentemente, pelas teorias de calibre, ou de Yang-Mills, que tem o eletromagnetismo como seu exemplo mais elementar, apareceu ao longo das últimas décadas uma série de equações diferenciais parciais não-lineares com significado geométrico, entre as quais podemos citar: as equações de aplicações harmônicas e pseudo-harmônicas (também conhecidas como as equações de campo do modelo sigma), as equações de Yang-Mills auto-duais, as equações de Seiberg-Witten e o fluxo de Ricci (que serviu de base para a solução da conjectura de Poincaré obtida por Perelman, baseado em trabalhos anteriores de Hamilton). E também não podemos nos esquecer de mencionar a equação de Black & Scholes (uma base para a precificação de opções no mercado financeiro).

Outra vertente, não menos importante, provêm da descoberta de certas equações diferenciais parciais em uma dimensão espacial que definem sistemas hamiltonianos completamente integráveis e tem importantes aplicações tecnológicas, tais como a equação de Korteweg - de Vries, a equação de Schrödinger não-linear, a equação do ferromagneto de Heisenberg e a equação Sine-Gordon, entre outras.

Como se vê, a diversidade das espécies no zoológico das equações diferenciais parciais que desempenham algum papel importante na matemática aplicada é grande, e ela continua crescendo.